МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Белгородский государственный технологический университет

им. В.Г. Шухова

**Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу**

**«Прикладная математика» для студентов дистанционной формы обучения специальности**

Белгород

2015МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Белгородский государственный технологический университет

им. В.Г. Шухова

Кафедра высшей математики

Утверждено

научно-методическим советом

университета

**Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу**

**«Прикладная математика» для студентов дистанционной формы обучения специальности**

Белгород

2015

УДК 519.8(07)

ББК 22.1я7

М54

Составители: канд, техн. наук, доц. Г. Л. Окунева,

ст. преп. С. В. Рябцева

Рецензент канд. физ.-мат. наук, проф. Б. З. Федоренко

|  |  |
| --- | --- |
| М54 | Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Прикладная математика» для студентов дистанционной формы обучения специальности /сост. Г. Л. Окунева, С. В. Рябцева -  Белгород: Изд-во БГТУ, 2015. – 37 с. |

Методических указания составлены на основании требований государственного стандарта высшего профессионального образования и предназначены для студентов дистанционной формы обучения направления бакалавриата

Публикуется в авторской редакции.

**УДК 519.8(07)**

**ББК 22.1я7**

|  |  |
| --- | --- |
| © | Белгородский государственный технологический университет  (БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2015 |

1. **Решение трансцендентных уравнений**

*Цель*: изучить методы решения трансцендентных уравнений.

Ход работы:

1. Отделение корней уравнения – определение промежутка, на котором имеется один из корней уравнения.

2. Определение корней уравнения методом половинного деления.

1. Отделение корней уравнения – определение промежутка, на котором имеется один из корней уравнения.

Отделение корня производим графически, записав уравнение в виде: 

Строим графики функций 

Действительные корни уравнения  – это точки пересечения ( их абсциссы ) графиков функций  Найдем отрезок , куда попадает абсцисса пересечения графиков, и проверим условие теоремы Больцано–Коши: на концах отрезка функция  имеет разные

знаки: 

Пример. Найти корни уравнения с точностью .

Введем функцию: .

Разобьем функцию на две функции: , .

Построим графики этих функций (рис. 1):

 ,   



Имеется два корня на отрезках [ -1;0 ] и [ 0;1 ] (рис. 1).

Проверим значение функции на концах первого отрезка [-1;0]





следовательно на отрезке есть корень.

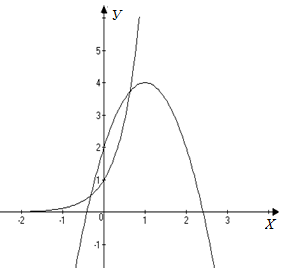


Рис. 1

2. Определение корней уравнения методом половинного деления.

Необходимо построить последовательность вложенных отрезков, на концах которых функция принимает значения разных знаков.

Каждый последующий отрезок получают делением пополам предыдущего.

Рассмотрим функцию на [*a*;*b*]. Разобьем отрезок пополам точкой  (рис. 2). Определим знак функции , выбираем отрезок [*a*; *c*] или [*c*; *b*], где функции  имеют разные знаки(в программе проверяем условие или ).

Пусть выбрали отрезок [*a*; *c*]. Присвоим *b* = *c*.

С новым отрезком [*a*; *b*] поступаем аналогично.

Если корень находится с точностью , то деление продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше . Тогда координата середины отрезка является значением корня уравнения с точностью .

Метод деления пополам – простой и надежный способ. Он сходится для любых непрерывных функций. Скорость сходимости не- велика . Число итераций можно определить по формуле 

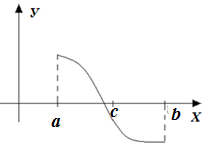


Рис. 2

Блок–схема метода:

Ввод *a*,*b*,*c*

*C*=(*a*+*b*)/2

да

*F*(*x*)

*x=c*

*x*, *F*(*x*)

*b=c*

*a=c*

да

Программа метода:

Uses Crt;

Var a,b,eps,c,x: real;

Function f( x:real ):real;

begin

f:=…….

end;

begin

clrser;

writeln (‘ Введите a и b ‘);

readln ( a;b );

writeln (‘ Введите точность eps ‘);

readln ( eps );

c:=(a+b)/2;

while abs (b-a) >2\*eps do

begin

if f(a) \*f(c)<0 then

b:=c

else

a:=c

c:=(a+b)/2;

end;

x:=(a+b)/2;

writeln (‘x=’, x:3:3, ‘f(x)=’, f(x):4:4)

end.

Пример. Найти корни уравнения с заданной точностью:

Построим графики функций (рис. 3): 

1. Отделили корни:

2. Найдем координату середины отрезка:

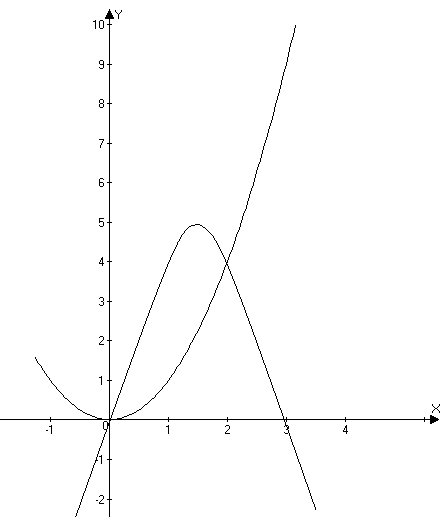


Рис. 3

3. Оценим знак на концах отрезка:  следовательно 

4. Найдем середину нового отрезка [1,57; 2,352] и длину отрезка:



5. Оценим знак функции на концах отрезка:  следовательно 

6. Найдем середину нового отрезка [1,961; 2,352] и его длину:



7. Оценим знак функции на концах отрезка:  следовательно 

8. Найдем середину нового отрезка [1,961; 2,156] и его длину:

9. Оценим знак функции на концах отрезка:  следовательно 

10. Найдем середину нового отрезка [2,058; 2,156] и его длину:

11. Оценим знак функции на концах отрезка:  следовательно 

12. Оценим точность вычислений: 

Точность достигнута, найдем корень уравнения



Ответ: *х*= 2,083.

Найти корни уравнения методом половинного деления.

Варианты заданий: Точность 

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

9.  10. 

11.  12. 

13.  14. 

15.  16. 

17.  18. 

19.  20. 

1. **Численное интерполирование функций**

*Цель*: изучить методы получения интерполяционного многочлена Лагранжа.

Ход работы:

1. По экспериментальным данным построить многочлен Лагранжа.

2. Построить графики экспериментальных данных и многочлена

Лагранжа.

1. Пусть задана таблица чисел  (табл. 1):

*Таблица 1*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *x*1 | *x*2 | …. | *x*n |
| *y*i | *y*1 | *y*2 | …. | *y*n |

Требуется составить многочлен степени , который

бы принимал значения в точках  График такого многочлена проходит через заданные точки.

Итерационный многочлен Лагранжа имеет вид:

 Общий вид:  ,

где .

Пример. Составить многочлен Лагранжа для таблицы значений (табл. 2):

*Таблица 2*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *y* | 2 | 3 | 4 | 5 |

1. Составим функцию 

2. Найдем производные при каждом :



Составим многочлен Лагранжа:

Составить многочлен Лагранжа для заданных табличных значений. Варианты заданий (табл 3).

*Таблица 3*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | | *y* | 0 | 3 | 5 | 4 | 1 | | 2 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 3 | 1 | 5 | 7 | |
|  | | | |
| 3 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 3 | 4 | 6 | | *y* | -7 | 5 | 8 | 14 | | 4 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 4 | 5 | 1 | | *y* | 3 | 7 | 9 | 19 | |
|  | | | |
| 5 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 3 | 7 | 13 | 21 | | 6 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 5 | 6 | 7 | 4 | | *y* | 25 | 36 | 49 | 16 | |
|  | | | |
| 7 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 5 | 3 | 7 | 9 | | 8 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | -1 | 2 | 3 | 5 | | *y* | 2 | 3 | 1 | -1 | |
|  | | | |
| 9 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 5 | 3 | 1 | 4 | | 10 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | x | 0 | 1 | 3 | 4 | | y | 2 | 3 | 2 | 3 | |
|  | | | |
| 11 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | -1 | 0 | 1 | 2 | | *y* | 3 | 1 | 2 | 5 | | 12 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 4 | 6 | 8 | | *y* | 3 | 8 | 1 | 2 | |
|  | | | |
| 13 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 3 | 4 | 7 | 9 | | *y* | 1 | 3 | 8 | 5 | 1 | | 14 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 5 | 8 | 10 | 9 | 3 | |
|  | | | |
| 15 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 10 | 5 | 0 | 7 | | 16 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | | *y* | -1 | 5 | 7 | 8 | 10 | |
|  | | | |
| 17 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | *y* | 3 | 5 | 10 | 8 | 5 | | 18 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | *y* | 3 | 5 | 10 | 8 | 5 | |
|  | | | |
| 19 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 3 | 6 | 9 | | *y* | 5 | 8 | 11 | 7 | | 20 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 3 | 5 | 7 | 5 | |

1. **Численное интегрирование**

*Цель*: изучить методы численного интегрирования.

Ход работы:

1. Вычислить заданный интеграл аналитически.

2. Вычислить тот же интеграл по формулам прямоугольников и трапеции, сравнить результаты.

1. Пусть функция – непрерывная и дифференцируемая *n* раз

на отрезке . Разобьем отрезок на *n* частей c шагом *h*:

.

Для приближенного вычисления интеграла можно использовать формулы:

а) прямоугольников (рис. 4):



или



где остаток   на отрезке - погрешность вычислений.

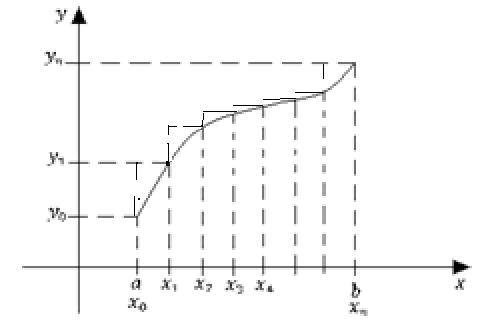


Рис. 4

б) трапеций (рис. 5):



где остаток   на отрезке 

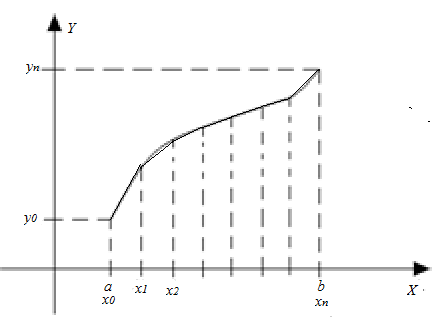


Рис. 5

Пример. Вычислить интеграл и оценить погрешность вычислений:(разбить отрезок на 10 частей).



1. Найдем шаг разбиения отрезка:

2. Вычислим значения абсцисс:



3. Найдем значения функции в точках *xi*:



4. Вычислим интеграл аналитически:



5. Используем формулу прямоугольников: 

 на 



Ответ: 

6. Используем формулу трапеций:



Ответ: 

Погрешность вычислений по формуле трапеций намного выше.

Вычислить интеграл аналитически и по формулам прямоуголь-ников и трапеций, оценить погрешность вычислений по разным формулам.

Варианты заданий:

1.  6. 

2.  7. 

3.  8. 

4.  9. 

5.  10. 

11.  16. 

12.  17. 

13.  18. 

14.  19. 

15.  20. 

**4. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

*Цель*: изучение методов решения обыкновенных дифференци-альных уравнений.

Ход работы:

1. Решить дифференциальное уравнение аналитически.
2. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера.

1. Метод Эйлера.

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка(ОДУ) при начальных условиях: 

Зададим небольшой шаг . Запишем аналог ОДУ, заменив





Пусть Тогда





Полученное уравнение является основой для метода Эйлера.

Метод Эйлера является методом первого порядка, точность метода зависит от шага *h*. На практике оценка погрешности проводится по правилу Рунге:



где  - оценка погрешности с шагом 0,5*h*.

Блок-схема метода Эйлера на отрезке [ *x*0;*x*k]:

Ввод 

*y*=*y*0+*f*(*x*0,*y*0)*h*

*y*0=*y*

*x*0=*x*0+*h*

*x*0;*y*0

конец

Программа метода:

program ODU;

uses crt, printer; var xk ,xo, yo, h:

real; j, n: integer;

function fa (x:real): real;

begin fa:={аналитическое решение};end;

function fun(x:real): real;

begin fun:={заданное уравнение};end;

procedure jeler (h,x: real; var y: real);{метод Эйлера}

begin y:=y+fun (x,y)\*h; end;

begin clrser;

xo:= ;{начальное значение x};

xk= ;{конечное значение x};

yo:= ;{начальное значение y};

h:= ;{шаг h=(xk-xo)/n n- число разбиений}

writeln (‘ x y yнал. Эйлер’);

while xo<xk do

begin

writeln (xo:0:6, ‘ ‘, yo:0:6, ‘ ‘fa(x):0:6);

jeler (h, x, y); xo:=xo+h;

ehd;

end.

Пример. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера:



1. Найдем точное решение дифференциального уравнения. Рассмотрим

соответствующее однородное ОДУ: 



Общее решение исходного ОДУ будем искать, используя метод вариации:



Найдем несколько значений функции по найденной формуле (табл. 4):

*Таблица 4*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -1 | -0,9 | -0,8 | -0,7 | -0,6 | -0,5 |
| *y* | 3 | 1,8954 | 1,1264 | 0,6174 | 0,3024 | 0,125 |

2. Найдем решение ОДУ, используя метод Эйлера. Пусть



Переписываем исходное ОДУ в виде 

В нашем случае:



Соберем полученные данные в таблицу (табл. 5):

*Таблица 5*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -1 | -0,9 | -0,8 | -0,7 | -0,6 | -0,5 |
| *y* | 3 | 1,7 | 0,842 | 0,321 | 0,046 | 0,017 |

Построим кривые по данным табл. 4,5 (рис.6):

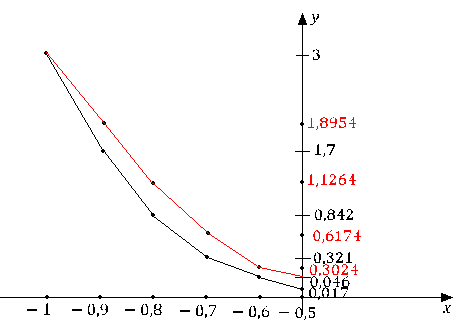


Рис. 6

Красная кривая соответствует аналитическми данным табл. 4, черная кривая соответствует данным табл. 5, данным, полученным по методу Эйлера.

Решить дифференциальное уравнение аналитически и методом Эйлера. Построить графики полученных решений.

Варианты заданий:

1.  Ответ: 

2.  Ответ: 

3.  Ответ: 

4. Ответ: 

5.  Ответ: 

6.  Ответ: 

7. Ответ: 

8.  Ответ: 

9.  Ответ: 

10.  Ответ: 

11.  Ответ: 

12.  Ответ: 

13.  Ответ: 

14.  Ответ: 

15.  Ответ: 

16.  Ответ: 

17.  Ответ: 

18.  Ответ: 

19.  Ответ: 

20.  Ответ: 

**5. Методы обработки экспериментальных данных**

*Цель*: изучение методов простейшей обработки экспериментальных данных.

Ход работы:

1. Графически оценить связь между переменными *х* и *y* (данные взять из лабораторной работы № 4, табл. 5).

2. Методом наименьших квадратов найти неизвестные параметры линейной зависимости переменных.

3. Оценить погрешность вычислений.

1. Пусть опытные данные заданы таблицей (табл. 6):

*Таблица 6*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | *x*1 | *x*2 | … |
| *y*э | *y*1 | *y*2 | … |

По этим данным подберем вид эмпирической формулы по виду графика. Построим точки на плоскости. Проведем аппрок-симирующую кривую по возможности близко к полученным точкам (рис. 7).

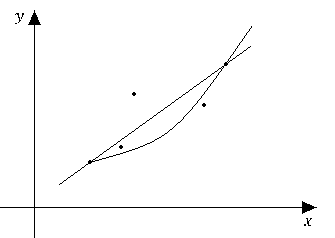


Рис. 7

2. Оценим отклонения значений экспериментальных данных и полученных по выбранной формуле:

Используем метод наименьших квадратов для оценки минимума квадратов отклонений: . Экстремум функции находим при условии, что частные производные функции *F* по всем

неизвестным равны нулю: 













Пример. Пусть таблица данных (табл. 7) аппроксимируется линейной функцией: 

*Таблица 7*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *y* | 2 | 4,9 | 7,9 | 11,1 | 14,1 | 17 |

Построим точки  на плоскости. Данные точки хорошо ук-ладываются на прямую (рис. 8). Выберем линейную аппроксимацию:



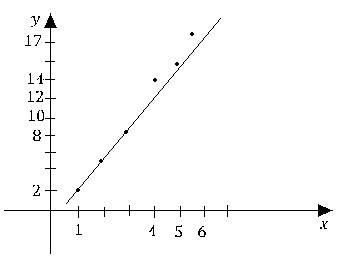


Рис. 8

Составим необходимые суммы:



Составим систему уравнений:



Найдем решение системы уравнений:



Прямая, которая описывает экспериментальные данные, имеет вид:

.

Найдем значения в точках  и сравним значения и  (табл. 8).

*Таблица 8*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  |
|  | 2 | 4,9 | 7,9 | 11,1 | 14,1 | 17 |  |
|  | 1,943 | 4,966 | 7,989 | 11,011 | 14,034 | 17,057 |  |
|  | 0,057 | 0,066 | 0,089 | -0,089 | -0,066 | 0,0572 |  |
|  | 0,0033 | 0,0044 | 0,008 | 0,008 | 0,0044 | 0,0033 | 0,0314 |

Ошибку вычислений найдем по формуле:



**6. Пример выполнения лабораторных работ**

Выполним подробный разбор лабораторных работ варианта № 21.

Лабораторная работа № 1

Найти корни уравнения методом половинного деления с заданной точностью 

Разобьем функцию на две и построим их (рис. 9):



Эти функции пересекаются в точке А, ее координата 

Проверяем значения функции на концах отрезка:

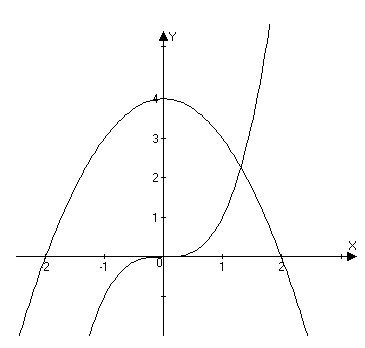


Рис. 9

1) 

2) 

Получаем, что  следовательно на отрезке [1, 2] корень есть.

2) Применяем метод половинного деления, чтобы найти корни уравнения: в нашем случае



Определяем знак на [1; 1,5] и [1,5; 2]:







Так как то корень уравнения лежит на отрезке [1,5; 2] .

Пусть



Определяем знак на отрезках [1; 1,75] и [1,75; 2]:







Так как  следовательно корень уравнения лежит на отрезке [1,5; 1,75] . Пусть



Определяем знак на отрезках [1,5; 1,625] и [1,625,75; 1,75]:







Так как  следовательно корень уравнения лежит на отрезке [1,5; 1,625] . Найдем длину отрезка и сравним её с точностью вычислений 



следовательно деление отрезка продолжаем.



Определяем знак на отрезках [1,5; 1,5625] и [1,5625,75; 1,75]:







Так как  следовательно корень уравнения лежит на отрезке [1,5; 1,5625] .



Определяем знак на отрезках [1,5; 1,5625] и [1,5625; 1,75]:







Так как  следовательно корень уравнения лежит на отрезке [1,5; 1,53125] .



Определяем знак на отрезках [1,5; 1,515625] и [1,515625; 1,53125]:







Так как  следовательно корень уравнения лежит на отрезке [1,5; 1,515625] . Определяем длину отрезка:



Следовательно точность достигнута и корнем уравнения является число:



Корень уравнения

Лабораторная работа № 2

Составить многочлен Лагранжа по заданным табличным данным (табл. 9):

*Таблица 9*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 2 | 4 | 6 | 8 |
| *y* | 3 | 8 | 1 | 2 |



Или в общем виде:



где 

В нашем случае:

1. 

2. Найдем значения производных при каждом 



3. Составляем многочлен Лагранжа:

Ответ: 

Лабораторная работа № 3

Вычислить интеграл  аналитически и по формулам прямоугольников и трапеций, оценить погрешность вычислений по разным формулам.

1) Используем метод прямоугольников:



или 

где .

а). Найдем шаг разбиения, если *n*=10:



б). Разбиваем отрезок [0;2] на 10 частей и находим значения 



в). Применяем формулу (\*):

или г). Находим погрешность вычисления на отрезке [0; 2]:





Ответ: 

2) Используем формулу трапеций:



где погрешность вычислений 



В нашем случае:

 Находим погрешность вычисления:



Ответ: 

3) Вычисляем интеграл аналитически:



Вывод: формула трапеций даёт более точный результат.

Лабораторная работа № 5

Методы обработки экспериментальных данных

Используем полученные данные в лабораторной работе № 4 методом аппроксимации получить линейную зависимость между переменными *х* и *у* (табл. 10):

*Таблица 10*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | n=6 |
| *yi* | 3,2 | 7,8 | 11,2 | 13,0 | 19,1 | 23,6 |  |

Графическое изображение экспериментальных данных (рис.10):

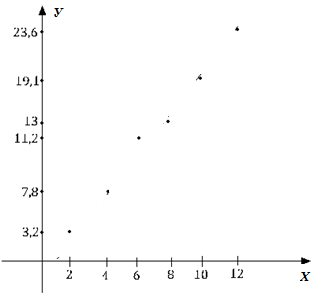


Рис. 10

Выбираем линейную аппроксимацию 

Составляем вспомогательную таблицу (табл. 11):

*Таблица 11*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *xi* | *yi* | *x2i* | *xiyi* | *y*T | *у*Э*-y*T | *(yЭ-y*T*)2* |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| 1 | 2 | 3,2 | 4 | 6,4 | 2,3048 | -0,8952 | 0,8014 |
| 2 | 4 | 7,8 | 16 | 31,2 | 6,5762 | -1,2238 | 1,4977 |
| 3 | 6 | 11,2 | 36 | 67,2 | 10,8476 | -0,3524 | 0,1242 |
| 4 | 8 | 13,0 | 64 | 104 | 15,119 | 2,119 | 4,4902 |
| 5 | 10 | 19,1 | 100 | 191 | 19,3904 | 0,2904 | 0,0843 |
| 6 | 12 | 23,6 | 144 | 283,2 | 23,6618 | 0,0618 | 0,00382 |
|  | 42 | 77,9 | 364 | 683 | \_\_\_ | \_\_\_ | 7,0016 |

Составляем систему уравнений:



Все необходимые суммы выбираем из последней строки табл. 11 (столбцы 2, 3, 4, 5):



Получаем систему:



Составляем уравнение прямой, которая описывает экспери-ментальные данные:



Находим значения *У*Т, соответствующие данным *x*i и заносим в табл. 11 в столбец 6.

Находим погрешность вычислений (столбец 8 табл. 11):



По найденным значениям строим прямую (\*\*) (рис. 11).

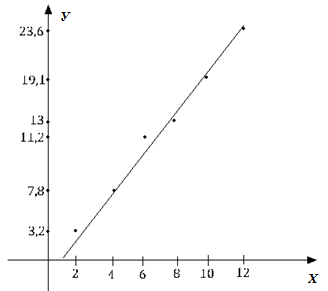


Рис. 11

Учебное издание

**Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу**

**«Прикладная математика» для студентов дистанционной формы обучения специальности**

Составители: Окунева Галина Леонидовна

Рябцева Светлана Васильевна

Подписано в печать .13 Формат 60x84/16. Усл. печ. л.2. Уч.-изд. л. 2

Тираж 100 экз. Заказ № Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете

им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46